Я. О. Кохан
аспірант відділу логіки та методології науки Інституту філософії імені Г.С. Сковороди НАН України

Синхронізації висловлювань внутрішньої часової логіки

Внутрішньою пропозиційною часовою логікою автор називає розділ логіки, який досліджує поєднання часових висловлювань в більш складні за допомогою спеціальних сентенційних зв'язок, які поєднують у собі часовий та логічний зміст. Стаття присвячена доведенню теореми про число можливих станів справ, які можуть позначатися довільним молекулярним часовим висловлюванням, складеним з двох атомів.

Author calls the internal propositional temporal logic that part of logic concerning with constructing complex temporal sentenses from other ones using specific sententional connectives which join both temporal and logical sense. Paper presents proof of theorem on number of states of affairs concerning molecular temporal sentenses of two atoms.

Внутрішньою (пропозиційною) часовою логікою — символічно: $\mathbf{PT_i}$ — автор називає розділ часової логіки, який досліджує поєднання часових висловлювань (**т-висловлювань**) в більш складні за допомогою часо-логічних сентенційних зв'язок, які поєднують у собі часовий («далі», «одночасно або далі» і т. п.) та логічний (кон'юнкція, диз'юнкція та ін.) зміст; прикладом такої зв'язки є Т-оператор Г. фон Врігта.

Висловлювання $\mathbf{PT_i}$ описують тривання та відсутність якихось подій або часових явищ (подій або станів) на протязі деяких часових проміжків, які надалі називатимуться **контекстами**; отже, самим висловлюванням співставляються проміжки істинності (явище присутнє) та хибності (явище відсутнє), послідовність яких можна зобразити кортежем істинневих оцінок «істина» і «лож» (**істинневим кортежем**). Коли кілька даних висловлювань поєднуються, як вказано вище, у більш складне висловлювання, постає питання, як співвідносяться на заданому контексті проміжки їхньої істинності та хибності: співпадають, перетинаються, містяться один в одному? І скільки існує можливих поєднань (**синхронізацій**) такого роду? Останній проблемі присвячена дана стаття. Через складність першої розглянемо її тільки для випадку двох висловлювань. Отже:

Нехай дано атомарні т-висловлювання *A* і *B*, істинневі кортежі яких на контексті **К** нараховують *k* і *n* елементів відповідно (де *k* і *n* — якісь натуральні числа) — що означає, що контекст **К** розбивається відносно висловлювання *A* на *k* нерозривних проміжків, а відносно *B* на *n* нерозривних проміжків (нерозривними тут називаються опуклі щодо даних висловлювань проміжки). Питається: скільки існує синхронізацій кортежів із вказаними довжинами, якою б не була структура кожного з кортежів?

Має місце наступна *теорема*:

Якщо на контексті **К** натуральні числа *k* і *n* являють собою довжини істинневих кортежів атомарних т-висловлювань *A* і *B* відповідно, кількість синхронізацій Sync(*k*, *n*) кортежів вказаних т-висловлювань, незалежно від точного виду цих кортежів, дорівнює

$$\mathrm{Sync}(k, n) = 1 + 2 \sum_{d=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{d} \left(C^{i}_{d} \sum_{x=0}^{n-i-1} [d]\, x \right),$$

де вираз $\sum_{x=0}^{n-i-1} [d]\, x$ означає кратну суму спеціального виду, комбінаторний смисл якої буде пояснений в ході доведення.

***Доведення*.** Введемо для початку в нашу метамову деякі нові поняття. А саме, доволі зручно розглядати питання в термінах співпадіння або ні *меж* проміжків з обох кортежів істинності. Казатимемо, що у кожного проміжка є дві межі — **ліва** та **права**. Ліва межа знаменує початок проміжка, а права — його завершення;

сам проміжок являтиме в цьому разі чисту обмежену тривалість, спрямовану від своєї лівої до своєї правої межі. Дві ліві межі різних проміжків, однаково як і дві праві називатимемо **однаковими**, а дві межі різних проміжків, одна з яких ліва, а друга права — **різними**. При цьому ми не припускатимемо, що два проміжки можуть безпосередньо сусідити, так що їхні права межа одного та ліва межа другого співпадатимуть; однак нам потрібне припущення, за яким *однакові* межі різних проміжків можуть співпадати. Якщо покладений в основу розгляду контекст має перший та останній проміжки, то ясно, що він як проміжок має ліву і праву межі, які співпадатимуть з лівою межею першого та правою межею останнього проміжків цього контексту; відтак, будь-яке членування такого контексту на проміжки може бути синхронізоване з будь-яким іншим членуванням цього ж контексту принаймні за вказаними межами.

Тепер, оскільки довжини синхронізовуваних кортежів т-атомів A та B скінченні, ми можемо говорити про перший і останній проміжки вказаних кортежів, отже про їхні межі, отже про ліву межу першого та праву межу останнього з проміжків обох кортежів. Оскільки обидва кортежі за припущенням суть членування одного й того ж контексту, ліві межі їхніх перших проміжків та праві межі останніх проміжків співпадатимуть. Інші ж межі названих та інших проміжків (якщо такі існують) обох кортежів можуть як співпадати, так і ні, і суть знаходження всякої синхронізації полягає саме у встановленні всіх співпадінь та неспівпадінь меж всіх проміжків синхронізовуваних кортежів. Казатимемо, що за умови, коли деяка межа не співпадає з деякою іншою межею, вона лежить від неї або **справа**, або **зліва**. Виняток становлять лише ліва межа першого проміжка та права межа останнього проміжка контексту, щодо яких справедливо, що будь-яка межа (в межах даного контексту) не може лежати зліва від лівої межі першого проміжка контексту або справа від правої межі останнього проміжка контексту. Через таку виділеність названих меж, що виявляється в їхній граничності для обраного контексту, є сенс дати їм окремі назви; в якості таких візьмемо: **перша** та **остання** межі кортежу. З огляду на розглянуту вище відповідність між межами проміжків будь-яких кортежів і меж контексту, на якому такі кортежі розглядаються, казатимемо також про **першу** та **останню** межі контексту. Межі, які не суть перші або останні, назвемо **внутрішніми** щодо кортежів і щодо контекстів.

Нехай спершу $n = 1$. Тоді всі проміжки кортежу A знаходитимуться в межах єдиного проміжка, з якого складається кортеж B, при чому початок першого проміжка кортежу A збігатиметься з початком кортежу B, а останній проміжок кортежу A закінчуватиметься одночасно з єдиним проміжком кортежу B; в наших термінах: перша межа кортежу A співпадатиме з лівою межею єдиного проміжка кортежу B, а остання межа кортежу A співпадатиме з правою межею того ж проміжка кортежу B. Всі інші межі проміжів кортежу A знаходитимуться в межах єдиного проміжка кортежу B, тобто між його лівою та правою межею.

Це єдина синхронізація, яка може бути за умови $n = 1$. Таким чином, за цієї умови кількість можливих синхронізацій не залежить від величини k і є сталою. Позначимо це наступним чином:

$$\mathrm{Sync}\ (k, 1) = 1 = \mathrm{const}.$$

Звідси безпосередньо випливає симетричний варіант, коли $k = 1$, а n довільне:

$$\mathrm{Sync}\ (1, n) = 1 = \mathrm{const}.$$

Очевидно, що будь-яка послідовність з r проміжків містить $r + 1$ меж, котрі належать цим проміжкам. Дві з цих меж у всякому темпоральному кортежі суть перша й остання межі кортежу і, відповідно, контексту, якому відповідає цей кортеж. Ці дві граничні межі не змінюють свого статусу при будь-яких синхронізаціях, тому їх як деякі сталі можна викреслити із загального списку меж; тоді для кортежа довжиною r отримаємо $r - 1$ меж, які варіюють за своїм положенням у різних синхронізаціях, і отже мають враховуватися при підрахунку кількості останніх.

Як вище було відзначено, за умови $n = 1$ всі $k - 1$ меж кортежу т-атома A знаходяться правіше єдиної лівої межі кортежу т-атома B і лівіше єдиної його правої межі. У всякому іншому випадку, коли $n > 1$, кожна з $k - 1$ варійовних меж може або знаходитися в межах якогось із n проміжків, або співпадати з якоюсь із $n - 1$ внутрішніх меж; разом виходить, що кожна з варійовних меж може знаходитися в одній з $2n - 1$ логічно розрізненних позицій. Тому казатимемо, що для кожної з варійовних меж існує $2n - 1$ **альтернатив** або ж **логічних можливостей**. Принципова особливість нашої ситуації полягає в тому, що ці альтернативи не суть незалежні, і кількість альтернатив для конкретної межі з $k - 1$ меж безпосередньо залежить від того, в якій позиції знаходиться попередня, найближча до неї зліва межа. Пояснюється це тим, що ми розглядаємо не множини проміжків та їхніх меж, але послідовності перших і других, отже наша задача знаходження синхронізацій, будучи комбінаторною, має справу не з комбінаціями, а з розміщеннями елементів множин.

У попередньому абзаці ми розглянули ситуацію, яка співпадає з умовою нашої задачі про знаходження числа синхронізацій, коли $k = 2$ (отже, кількість варійовних меж $k - 1 = 1$), а n варіює. У введених вище позначеннях, маємо:

$$\mathrm{Sync}\,(2, n) = 2n - 1.$$

В продовження проведених міркувань розглядатимемо *межі* проміжків кортежу *A на проміжках* кортежу *B*. Для цього введемо деяку регулярну процедуру індуктивного варіювання проміжків кортежу B, яка полягатиме в тому, що припускатиметься, що кожен кортеж B довжини r ми отримуємо з кортежу довжиною $r - 1$ додаванням нового r-го проміжка зліва (спочатку, спереду, раніше). Інакше кажучи, починаючи із проміжка довжиною $n = 1$, ми додаватимемо до єдиного наявного другий проміжок зліва, третій — зліва до другого і т. д. Тим самим, нумерація проміжків кортежу B здійснюватиметься справа наліво, тобто з майбутнього в минуле, у протилежний бік від напрямку стріли часу.

Як говорилося вище, кожна з $k - 1$ меж між k проміжками може або знаходитися в межах якогось із n проміжків, або співпадати з якоюсь із $n - 1$ внутрішніх меж, що в сумі дає $2n - 1$ можливих позицій. Позиції нумеруватимемо, аналогічно до розширення довжини кортежу з n проміжків, справа наліво (з майбутнього в минуле); відтак, непарні номери отримуватимуть позиції, котрі знаходяться в межах кожного з n проміжків, а парні номери займатимуть позиції, що співпадають з кожною з $n - 1$ меж між n проміжками.

Варіювання кількості проміжків від k до $k + 1$ уявлятимемо, так само, як додавання $k + 1$-го проміжка до k наявних на момент варіювання проміжків *зліва*. Оскільки початок першого з k проміжків за умовами задачі повинен співпадати з початком першого з n проміжків, додавання, як воно тільки-но було описане, природно буде трактувати як поділ першого з k проміжків на два проміжки. Оскільки ж ми домовилися для зручності висловлюватися в термінах меж проміжків кортежу т-атома A, казатимемо про додавання *справа* до вже наявних $k - 1$-ої меж k-тої межі.

Таким чином, напрямки нарощування меж проміжків кортежів розглядуваних т-атомів та напрямки їхньої нумерації протилежні.

За таких умов, якщо число k фіксоване і відома величина $\mathrm{Sync}(k, n)$, перехід від кортежа довжини n до кортежа довжини $n + 1$

приведе нас до кількості синхронізацій, що дорівнюватиме Sync(k, n + 1). І навпаки, зафіксувавши величину n і здійснивши перехід від k до k + 1 проміжка (отже, від k – 1 до k меж), отримаємо перехід від Sync(k, n) до Sync(k + 1, n) синхронізацій.

Прослідкуємо другий з названих індуктивних кроків. Кожна межа окремо, як вище говорилося, може займати в межах довільної синхронізації одну з $2n$ – 1 позицій. Це рівнозначно тому, що ця межа єдина серед k – 1 меж. Коли за прийнятою вище методою додати до цієї єдиної межі другу, кількість її можливих позицій залежатиме від позиції першої межі. Якщо перша межа (з k – 1 меж) знаходиться в межах першого (справа) проміжка (з n проміжків), або співпадає з лівою межею першого проміжка, друга межа, яка знаходиться справа від першої, може перебувати лише в межах цього самого проміжка, тобто знаходитися лише в одній позиції. Якщо пересунути першу межу в другий проміжок, або сумістити її з його лівою межею, друга межа, як легко бачити, зможе займати вже три позиції: по одній в межах першого проміжка, на його лівій межі та в межах другого проміжка; перша з цих позицій тотожна єдиній позиції, яку займала друга межа за попередньої позиції першої межі (в межах першого проміжка), тобто перехід першої межі до другого проміжка (або до його лівої межі; це не стосується тільки останнього n-ого проміжка) збільшує кількість можливих позицій для другої межі на дві. Зрозуміло, що всі майбутні пересування першої межі на на одну або дві позиції так само додаватимуть до кількості позицій, можливих для другої межі, рівно дві нові позиції: на правій межі та в межах того проміжка, в який (або на ліву межу якого) перемістилася перша межа. Тим самим 1-ій та 2-ій позиціям першої межі відповідатиме по 1 позиції для другої межі, 3-ій та 4-ій позиціям першої межі — по 3 позиції для другої межі, і, взагалі, i-тій непарній позиції першої межі — i позицій для другої межі, а i-тій парній — $i-1$ позицій.

Останньою буде непарна $2n - 1$-ша позиція першої межі, якій відповідатиме $2n - 1$-на позиція другої межі. Звідси видно, що якщо кількість позицій для першої межі представляти як суму одиниць, для другої позиції це буде сума членів деякої арифметичної прогресії, що береться від 1-го до $2n - 1$-го члена цієї прогресії.

Знаходити, якою має бути ця сума безпосередньо, незручно, оскільки в ній арифметична величина кожного з її членів, крім останнього, повторюється двічі. Однак, можна звести потрібну нам суму до доволі простої (за обчисленням), якщо розбити послідовність членів у ній на дві послідовності; а саме, рахуватимемо окремо позиції другої межі, які виникають, коли позиція першої межі знаходиться в межах будь-якого проміжка (непарні позиції), і позиції, які виникають, коли позиція першої межі співпадає з якоюсь межею (парні позиції). В такому разі ми отримаємо дві прості суми перших n та перших $n - 1$ непарних натуральних чисел. Але ми підемо ще далі і зведемо ці суми до сум натуральних чисел взагалі. Для цього відзначимо, що кожна сукупна позиція двох розглядуваних досі меж — першої та другої, — в якій друга межа константно знаходиться в першій позиції, рівнозначна такій сукупній позиції, в якій цієї другої межі взагалі немає, тобто рівнозначна деякій позиції першої межі, коли вона єдина в кортежі. Таких позицій якраз $2n - 1$, що очевидно, отже їх можна вилучити із загальної суми (точніше з обох знайдених сум), додавши натомість їхню кількість $2n - 1$ до результату, що вийде, як окремий доданок. Коли вчинити саме так, з кожної із наших двох сум зникне перший член, а кожен наступний член зменшиться на одиницю і стане парним числом. Ми отримаємо, отже, суми перших $n - 1$ та перших $n - 2$ парних натуральних чисел, що рівнозначно подвоєним сумам перших $n - 1$ та перших $n - 2$ натуральних чисел.

Для двох меж (а це три проміжки), отже, маємо:

$$\mathrm{Sync}(3, n) = 2n - 1 + 2\sum_{0}^{n-1} x + 2\sum_{0}^{n-2} x.$$

В цьому виразі заради загальності виражене сумування від нуля, хоча реально логічного змісту нульові члени наведених сум не мають. Однак, оскільки кожен такий член дорівнює нулю, отже не змінює суми випадків, які нас цікавлять, ми і надалі у результовних виразах вказуватимемо нуль як нижню межу сумування.

Продовжимо наш індуктивний крок. Залежність між кількістю позицій для першої та другої з $k-1$ меж, яку ми вище вивели, являє собою закономірність, котра стосується всяких двох послідовних меж із загальної кількості $k-1$. А саме, всякій позиції кожної m-ної з $k-1$ меж (крім останньої) відповідає цілком певне число позицій $m+1$-ої з $k-1$ меж: i-тій непарній відповідає i позицій, i-тій парній — $i-1$ позицій. Відтак, кожному числу n позицій m-ної з $k-1$ меж відповідає сума двох подвоєних сум перших $n-i$ позицій (плюс $2n-1$), де i варіює від 1 до 2. Оскільки це має місце вже для першої та другої меж, то можна прослідкувати величину позицій для будь-якої з $k-1$ меж. Для третьої межі матимемо суму подвоєних сум (плюс $2n-1$) позицій для кожного з членів сум, що мають місце для другої межі; величина членів сум для другої межі варіює від 1 до $n-1$ та до $n-2$, відповідно варіюватимуть за числом членів відповідні до членів цих сум суми для третьої межі: ми сумуватимемо (двічі) до 1, до 2, і т. д. до $n-1$ та до $n-2$; потім це все потрібно буде сумувати між собою. Вираз, який ми таким чином отримаємо, буде мати вигляд деякої суми сум, де внутрішня сума береться до деякого числа r_1, а зовншня утворюється за рахунок варіювання самого r_1 від 1 до деякого r_2 такого, що $r_2 = 2n-1$. Як вище говорилося, члени сум (які сумуються у зовнішній сумі) будуть непарними натуральними числами і траплятимуться двічі. Щоб привести їхню суму до регулярного виду, згідно з виписаною вище методою ми спершу викреслимо ті члени, в яких друга та третя межа константно знаходяться в межах першого (з n) проміжка, і додамо їхню суму в якості окремого доданка; потім те ж здійснимо для членів, де константна тільки третя межа; сума викреслених членів дорівнюватиме, як видно, кількості випадків, у яких відсутня третя межа, тобто кількості синхронізацій для двох меж: Sync(3, n). Після цього залишок потрібно буде розбити, згідно з нашою методою, на суми послідовних натуральних чисел. Такі суми утворюватимуться, коли перша та друга межі знаходяться кожна або тільки в парних, або в непарних позиціях; для двох меж при двох можливостях для кожної з них окремо (парні або непарні позиції) існує 2^2 сукупних можливостей для них разом: (1) перша і друга межі в непарних позиціях, (2) перша в непарних, друга в парних позиціях, (3) перша в парних, друга в непарних позиціях, (4) обидві в парних позиціях. Кожній із цих чотирьох можливостей відповідатиме окрема сума послідовних натуральних чисел. При цьому числа, до яких вестиметься сумування, будуть для різних можливостей різними. А саме: для можливості (1) максимальним членом в сумі буде $n - 1$, оскільки обидві перші межі за умов непарності своїх позицій можуть знаходитися разом в n-ому проміжку. Для (2) і (3) сумування вестиметься до $n - 2$, позаяк максимальна за числом позиція, яку матиме одна з меж, обов'язково буде співпадати тут із правою межею n-ого проміжка, отже третя межа не може перебувати лівіше, аніж у межах $n - 1$-ого проміжка. Для (4) матимемо максимально $n - 3$, бо перша межа максимально займатиме позицію, що співпадатиме з правою межею n-ого проміжка, друга межа, відповідно, співпадатиме з межею $n - 1$-ого проміжка, чим знаходження в цих проміжках для третьої межі робитиметься неможливим, отже вона зможе варіювати від 2-го до $n - 3$-го проміжка.

Для трьох меж, згідно зі сказаним, матимемо:

$$\mathrm{Sync}(4, n) = 2n - 1 + 2(\sum_{0}^{n-1} x + \sum_{0}^{n-2} x) + 2(\sum_{n_1=0}^{n-1} \sum_{x=0}^{n_1} x + 2\sum_{n_1=0}^{n-2} \sum_{x=0}^{n_1} x + \sum_{n_1=0}^{n-3} \sum_{x=0}^{n_1} x),$$

або, простіше,

$$\mathrm{Sync}(4, n) = \mathrm{Sync}(3, n) + 2(\sum_{n_1=0}^{n-1} \sum_{x=0}^{n_1} x + 2\sum_{n_1=0}^{n-2} \sum_{x=0}^{n_1} x + \sum_{n_1=0}^{n-3} \sum_{x=0}^{n_1} x).$$

Тепер вже видно закономірність, з якою зростає кількість синхронізацій при зростанні числа k за умов фіксованості n. При додаванні до числа меж $k - 1$ ще однієї, k-тої межі до кожної сукупної позиції, яку можуть займати $k - 1$ меж (а всяка така сукупна позиція є окремою синхронізацією), додаватиметься цілком певне число, яке прямо залежатиме від того, в якій позиції знаходитиметься найправіша з $k - 1$ меж, тобто $k - 1$-ша межа; цю залежність між номером найправішої з $k - 1$ меж та числом позицій для k-тої межі ми вже вище двічі наводили; вона призводить до того, що всякому числу позицій для $k - 1$ меж відповідатиме сума деякого висхідного ряду натуральних чисел для k-тої межі, отже й сукупно для k меж. Приведення цієї суми до подвоєних сум перших $n - i$ натуральних чисел обговорювалося вище для прикладу $k = 3$. Оскільки число позицій для $k - 1$ меж утворене за такою ж закономірністю, воно так само має вигляд деякої суми кількох сум, отже для k меж матимемо суми сум там, де для $k - 1$ меж ми мали просто суми. При цьому зрозуміло, що ці «просто суми», будучи утворені за тією ж закономірністю, самі, якщо $k > 2$, являють собою багатоступінчасті суми сум ... сум; отже, додавання нової межі збільшуватиме ступінь (кратність) цих сум на одиницю.

Розглянемо ці суми. Перш за все введемо для них спеціальний термін; в якості такого виберемо вираз ***n*-кратні суми**. Особливість таких n-кратних сум полягає в тому, що на відміну від багатократних сум, які звичайно трапляються в математичних задачах, сумування в різних сумах-членах n-кратної суми ведеться не по різних змінних виразу, що стоїть під внутрішнім знаком сумування, але кожна із сум членів примушує варіюватися (і вказує межі варіювання) верхню межу, до якої йде сумування в сумі, знак якої знаходиться безпосередньо правіше від знака даної суми. Таким чином сумування в усіх сумах-членах n-кратної суми, крім останнього, внутрішнього члена, ведеться по змінних, які знаходяться в самих знаках сумування, і лише останній член визначає сумування по змінній функціонального виразу, що стоїть під знаком цієї найбільш внутрішньої суми. Відповідно, у всіх сумах-членах n-кратної суми, окрім першої, верхня межа сумування задається змінною, і тільки в найбільш зовнішній сумі верхня межа визначена, тобто позначена константою. З цих особливостей ми бачимо, що різні суми-члени n-кратної суми не суть незалежні, але кожен член залежить від попереднього (найближчого лівого, зовнішнього), бо один з його параметрів зв'язується попереднім членом. Відтак, на відміну від однакових кванторів, знаки сум-членів n-кратної суми не можна міняти місцями.

Через ці особливості n-кратних сум і принципову важливість їх для нашої задачі, а також враховуючи необхідність чітко відрізняти їх від інших видів сум, як однократних, так і багатократних з незалежними членами, введемо для них спеціальне позначення:

$$\mathop{S}_{x=0}^{m}[n]\,f(x),$$

де n в квадратних дужках позначає кратність або ступінь суми, x — змінну, по якій ведеться сумування, а m — константу в найбільш зовнішній сумі даної n-кратної суми, яка вказує верхню межу, до якої в цій найбільш зовнішній сумі ведеться сумування. Додатково відзначимо, що ми розглядаємо тут тільки такі n-кратні суми, в яких нижня межа сумування в усіх сумах-членах однакова; через те її можна зобразити єдиним числом; при цьому це число стосуватиметься в різних сумах-членах різних змінних, з яких нам неважливі всі, окрім змінної, яка входить у функціональний вираз, на який навішена вся дана n-кратна сума; тому саме цю змінну ми виписуємо під знаком суми в записі n-кратної суми.

З таких домовленостей безпосередньо випливає, що

$$\underset{x=0}{\overset{m}{S}}[1]f(x) = \underset{x=0}{\overset{m}{S}}f(x).$$

Для загальнозначущості введеного позначення слід ще домовитися, чому дорівнюватиме нулькратна сума. Покладемо, що

$$\underset{x=0}{\overset{m}{S}}[0]f(x) = m.$$

Повернемося до нашого доведення. Кратність сум тільки-но введеного виду залежить від кількості меж $k-1$ і дорівнює, як легко бачити, $k-2$. Важливо ще встановити кількість таких сум. Для цього перш за все відзначимо, що подвоєні суми перших r (до якого саме r, скажемо далі) натуральних чисел для $k-1$-ої межі виникають тоді, коли кожна з лівіших $k-2$ меж знаходиться тільки в парних або тільки в непарних позиціях. Сукупно для $k-2$ меж тоді існуватиме 2^{k-2} можливостей, при кожній з яких для $k-1$-ої межі виникатиме дві $k-2$-кратні суми перших r натуральних чисел, як у виразі Sync(3, n), що рівнозначно одній подвоєній сумі перших r натуральних чисел. Верхня межа сумування в такій сумі безпосередньо залежатиме від того, скільки меж із кількості $k-2$ знаходяться в парних, а скільки — в непарних позиціях. Розглядатимемо це питання з точки зору того, скільки меж серед $k-2$ знаходяться в парних позиціях. Таких меж може бути 0, 1, ..., $k-2$. У першому випадку (всі $k-2$ меж в непарних позиціях) максимальний проміжок, в якому може знаходитися $k-1$-а межа, n-ий, отже сума для останньої межі «йтиме» до $n-1$. У другому випадку одна з $k-2$ меж знаходитиметься максимально на правій межі n-ого проміжка, отже остання межа не зможе перебувати лівіше, ніж у межах $n-1$-ого проміжка, отже сума для неї йтиме до $n-2$. Продовжуючи це міркування, матимемо для всякого випадку, коли i з $k-2$ меж знаходяться в парних позиціях, суми до $n-i-1$, тобто

$$2 \mathop{S}_{0}^{n-i\ -1} [k-2]\, x.$$

Як відомо з комбінаторики, i меж можна вибрати з $k-2$ C^i_{k-2} способами. Загалом, отже, матимемо:

$$2\, C^i_{k-2} \mathop{S}_{0}^{n-i\ -1} [k-2]\, x.$$

Передодававши всі такі члени між собою, отримаємо

$$2 \mathop{S}_{i=0}^{k\ -2} (\, C^i_{k-2} \mathop{S}_{x=0}^{n-i\ -1} [k-2]\, x\,).$$

(Відзначимо, що в останньому виразі випадок $i = 0$ у зовнішній сумі має логічний смисл, на відміну від $x = 0$ у внутрішній $k-2$-кратній сумі.)

Згідно з описаною вище закономірністю, останній аналітичний вираз, яки ми вивели, потрібно додати до Sync($k-$ 1, n), щоб отримати Sync(k, n). Оскільки ж сама кількість Sync($k-$ 1, n) отримується тим самим способом із Sync($k-2$, n), величину Sync(k, n) можна представити як суму доданків тільки-но виведеного виду, де замість k фігурує змінна, що варіює від 2 до k. В цьому є деяка незручність, тому замінимо величину $k-2$ в останньому виведеному виразі на змінну d, яка варіюватиме від 0 до $k - 2$. В такому разі ми, не зменшуючи арифметичної загальнозначущості, зможемо виписати загальну кількість синхронізацій для довільних n та k в такому вигляді:

$$\mathrm{Sync}\,(k, n) = 1 + 2 \mathop{S}_{d=0}^{k\,-2} \mathop{S}_{i=0}^{d} (\, C^{i}_{d} \mathop{S}_{x=0}^{n-i\,-1} [d\,]\, x\,).$$

Слід пояснити, чому в результовній сумі у нас замість члена $2n - 1$, який фігурував у частинних випадках, відповідаючи ситуації, коли $k = 2$, тепер стоїть член, що дорівнює 1. Річ у тім, що випадок $d = 0$ якраз і описує цю ситуацію, якщо прийняти деякі домовленості. Дійсно,

$$\mathrm{Sync}\,(2, n) = 1 + 2 \mathop{S}_{d=0}^{2\,-2} \mathop{S}_{i=0}^{d} (\, C^{i}_{d} \mathop{S}_{x=0}^{n-i\,-1} [d\,]\, x\,).$$

Тут незрозуміло, що може означати вираз $\mathop{S}_{x=0}^{0} f\,(x)$. Покладемо за означенням, що

$$\mathop{S}_{x=0}^{0} [1]\, f\,(x) = \mathop{S}_{x=0}^{0} f\,(x) = f\,(x).$$

В такому разі наш результат зведеться до

$$\mathrm{Sync}\,(2, n) = 1 + 2 \mathop{S}_{i=0}^{d} (\, C^{i}_{d} \mathop{S}_{x=0}^{n-i\,-1} [d\,]\, x\,).$$

Оскільки ж у нас $d = k - 2$, а $k = 2$, повторно застосувавши означення, матимемо

$$\mathrm{Sync}\,(2, n) = 1 + 2\, C^{i}_{0} \mathop{S}_{x=0}^{n-i\,-1} [0]\, x = 1 + 2\, C^{0}_{0} \mathop{S}_{x=0}^{n-0\,-1} [0]\, x.$$

За вище введеною домовленістю, $\underset{x=0}{\overset{n-1}{S}}[0]\ x = n - 1$. Залишається визначити, чому має дорівнювати C^0_0 . Ми досягнемо своєї мети, якщо умову $C^0_n = 1$ розповсюдимо на випадок n = 0, тобто встановимо, що

$$C^0_n = C^0_0 = 1.$$

В цьому разі ми отримаємо

$$\text{Sync}\ (2, n) = 1 + 2\ (n - 1).$$

Залишається вказати, що $2n - 1$ можна переписати рівнозначним виразом $1 + 2(n - 1)$. Звідси й отримуємо виведений вище вираз для Sync(k, n).

Таким чином, ми отримали загальний аналітичний вираз для довільних n та k; відтак нам непотрібно вже досліджувати індуктивний перехід від n до $n + 1$, і питання кількості синхронізацій для істинневих оцінок двох т-атомів внутрішньої т-логіки на обраному часовому контексті вирішене; тим самим теорема доведена.