Кохан Я. А.
Киев

Феномен знания с точки зрения логики

Знание, его представления и преобразования изучаются в целом ряде наук (напр., в психологии), разделов философии (напр., в эпистемологии) и даже инженерных дисциплин (напр., в исследованиях искусственного интеллекта). И среди всех этих научных, философских и инженерных дисциплин имеется одна выделенная, которая изучает знание в его наиболее общих и отвлечённых свойствах, и поэтому является фундаментальной по отношению ко всем другим дисциплинам, изучающим знание. Такой выделенной дисциплиной является логика.

В данной работе мы рассмотрим, как знание изучается в логике.

Знание в логике

Знать — значит: понимать, причем понимать правильно. Понимать — значит: осмысливать. Согласно Фреге, осмысление происходит посредством *схватывания* или *постижения* смыслов [12; 314], [13; 335, 339–340]. Следовательно, мы правильно изберём отправную точку для изучения знания, если постулируем, что

ТЕЗИС 0. *Ествественной единицей знания является смысл*.

Смыслы, о которых идет речь, являются семантическими абстракциями, а не элементами психической деятельности индивида, поэтому точнее могут быть названы семантическими смыслами. В [4; 57] проведено аккуратное различение семантических и психических смыслов. В данной работе мы остаёмся в пределах логики, а потому везде будем оперировать исключительно семантическими смыслами.

Теория таких смыслов является частью более обширной теории, лежащей в основании логической семантики и известной под названием треугольника Фреге; собственно теория смыслов как часть треугольника Фреге до сих пор не имела удовлетворительного построения. Мы будем исходить в своих рассуждениях из результатов работ Фреге и автора в этой области.

Итак, знание “состоит” из смыслов (тезис 0). Исходя из этого постулата, мы можем легко проследить тот факт, что знание непосредственно или опосредованно является объектом изучения практически во всех разделах и теориях логики. А именно:

В **логике высказываний** изучается строение и “поведение” *высказываний*. Но «Мы воспринимаем высказывания через выражающие их повествовательные предложения некоторого языка (предметного языка). Высказывания суть смыслы этих предложений» [2; 12]. Таким образом, объектом изучения логики высказываний является знание, организованное в высказывания как структурные единицы.

Лингвистические, или синтактические (от моррисовского «синтактика»), разделы логики: **теория формальных языков**, **логический синтаксис** и **теория доказательств** — изучают языковые конструкции/образования, отношения между ними и способы их преобразования, а также множества таких образований (теории) и составленные из них структуры, или системы (исчисления). При этом мы оперируем не любыми языковыми образованиями, а только выделенными, или *отмеченными* — т. наз. *правильно построенными*, или проще, *правильными* (а именно, (квази)термами и (квази)формулами) — образованными таким образом, чтобы быть способными отображать некоторые смысловые единицы, в частности, т. наз. индивидные концепты и высказывания. И синтаксическая структура изучаемых языковых образований, в отличие от соответствующей структуры в естественных языках, выбирается таким образом, чтобы максимально точно отражать смысловые логические связи внутри тех элементов знания, тех смыслов, которые могут выражаться в данных языковых, синтаксических образованиях. Это очень чётко видно на примерах грамматически правильных, но лишённых смысла языковых конструкций. К примеру, выражение «подинтегральная функция» может быть признано допустимым объектом изучения в синтактике, в то время как «подинтегральный смех» таковым не является, хотя и является правильно построенным.

Теории определяются чисто лингвистически: как множества предложений — но это именно те предложения, которые выражают высказывания, то есть, некоторое знание (существуют и другие предложения, например, выражающие побуждения либо оценки вида «хорошо–плохо»). И всякая теория интересна и нужна только как лингвистическая оболочка выраженного в ней знания, а не сама по себе. Так, множество, состоящее из одного предложения «Любой арбуз вкуснее любого куска мела», является теорией; но вряд ли какой-либо логик сочтёт возможным рассматривать в качестве теории множество из одного (грамматически правильно постоенного) предложения «Любой арбуз вкуснее любого интеграла».

Исчисления же (в обычном для логиков понимании, ибо ниже, в третьем разделе, понятие исчисления будет обобщено и расширено) являют собой системы организации *доказательства* и *вывода*, а эти два последние понятия нужны не сами по себе, а служат целям формализации содержательных понятий *тавтологии* и *следования*. Но тавтологией можно назвать только правильно построенную формулу, являющую собой логическую форму высказываний, истинных на любых моделях. Следование же есть отношение, сохраняющее истинность при переходе от группы формул к формуле, а значит, от группы высказываний к высказыванию (мы не будем здесь касаться девиантных понятий, похожих на логическое следование, но сохраняющих другие свойства высказываний или формул). Таким образом, исчисления служат для формализации понятий тавтологической истинности и состоят из правил (*правил преобразования*), сохраняющих истинность — а, следовательно, могут быть названы структурами, представляющими и сохраняющими истинность.

После работ Тарского, начиная с [17], принято говорить об истинности и ложности предложений, однако, ещё Фреге указывал, что это, строго говоря, неверно: истинность и ложность следует относить к высказываниям (по терминологии Фреге: мыслям) как смыслам предложений [13; 328, прим.], [12; 308, 315–316]. Из этого следует, что исчисления являются структурами, представляющими свойства (тавтологичность, выполнимость и т. д.) и формализующими преобразования, соответствующие связям (отношениям: следование, несовместимость и т. п.) между структурами смыслов как элементов знания (термы и формулы — это именно структуры, или формы, смыслов). Таким образом, исчисления в конечном счёте служат цели изучения знания.

Алгебра логики (теория булевых операций) и её продолжения — *k*-значные логики и теория решёток исчислений и теорий — изучают множества формальных объектов, абстрагированных от структур, составленных из смыслов, то есть, структур знания. Так, функции алгебры логики суть формальные, отвлечённые представления истинностных функций логики высказываний (хотя, будучи формальными, могут быть интерпретированы и другими способами); здесь мы изучаем знание в его абстрактных формах; в терминах теории моделей можно сказать, что система истинностных функций как система знания является главной интерпретацией алгебры логики.

k-значные логики имеют не только логические интерпретации и потому как таковые выходят за пределы предметного поля исследования знания. Однако, их всегда можно интерпретировать на системах альтернатив, то есть множествах предикатов, один и только один из которых выполняется на заданной индивидной области; автор намерен показать в ряде отдельных работ, что системы альтернатив являются отдельным логическим объектом исследования в рамках алгебры логики в расширенном понимании.

Исчисления, как мы только что отмечали, являются синтаксическими абстракциями от непосредственных структур знания, поэтому составленные из них математические структуры (а равно, и категорные образования) суть системы систем знания.

Логическая **семантика** занимается изучением знания по определению. Фундаментальная теория, лежащая в основании всей семантики, — так наз. Треугольник Фреге — непосредственно изучает связи между знанием (смыслами), его языковой формой (языковыми выражениями) и отображаемой им действительностью (семантическими значениями, они же денотаты). При этом, единственная развитая семантическая теория — теория моделей — буквально изучает отношения между языком и действительностью (между синтаксическими и математическими структурами), явным образом игнорируя вопрос о содержащемся в синтаксических структурах знании (смыслах). Не означает ли это, что теория моделей выбивается из ряда разделов логики, изучающих знание? Нет, не означает, ибо на практике возможно пользоваться только теми языковыми, синтаксическими конструкциями, которые мы понимаем, смысл которых нам известен [4; 58–59]; исключения из этого правила имеются в символических языках логики (переменные) [3; 72–73], однако, в приложениях они исчезают, и остаются только осмысленные языковые конструкции. Поскольку же, как отмечалось выше, такие конструкции строятся так, чтобы как можно лучше отображать логическую структуру выражаемых ими смыслов, семантические отношения вида «языковое выражение – семантическое значение» являются только удобной моделью для представления отношений вида «смысл – семантическое значение», то есть, отношений между знанием и действительностью. Особо подчеркнем то обстоятельство, что специальной теории, изучающей связи знания с языком, в логике нет, поскольку молчаливо предполагается, что структура языковых образований выбирается таким образом, чтобы максимально точно отражать структуру выражаемого в них знания — а в идеале иметь одинаковую с ним структуру.

Различные **теории разрешения**, построенные в своё время логиками, сейчас принято выделять в отдельную науку — *теорию алгоритмов*. Однако легко убедиться, что все эти теории оперируют логическими объектами либо их аналогами и исследуют логическую проблематику — и, что они также исследуют знание.

Так, *вербальные* (марковские) *алгоритмы* строятся на фундаменте теории формальных языков как синтаксические конструкции (схемы подстановок), выражающие *предписания*, могущие быть выполненными человеком либо его хорошей моделью [7; 135]. Предписание — это смысл, отражающий некоторую возможную процедуру; выполнение человеком предписания — это реализация такого смысла в действительности (что отличается от выполнения высказывания в той же действительности; см. следующий раздел). Поскольку же алгоритм выражается в некотором языковом образовании (схеме подстановок), его может выполнять и искусственный интеллект (“машина” в традиционной терминологии или комп’ютерная программа в современном видении). Поэтому можно сказать, что теория нормальных алгорифмов Маркова изучает, как и другие разделы логики, знание — но знание особое, процедурное (см. следующий раздел данной статьи).

Абстрактные вычислительные машины, или *машины Тьюринга*, исследуют то же самое процедурное знание, ибо исполняют те же алгоритмы, заданные синтаксическими схемами или таблицами команд.

Теория лямбда-опеределимых функций (λ-*определимых функций*), вопреки своему названию, занимается — по крайней мере, в оригинальной формулировке Чёрча — не самими функциями, а их формализованным представлением в специальных символических языках логики. В последних вводится специальный символ, именуемый оператором λ, и три правила для оперирования формулами, содержащими либо нет этот символ. Поэтому на данную теорию распространяется всё сказанное выше о разделах синтактики (см. также след. абзац).

Теория *рекурсивных функций*, на первый взгляд, не занимается изучением знания, и вообще оперирует внелогическими математическими объектами — а именно, функциями натуральных чисел. Однако, возможно сформулировать теорию рекурсии в терминах словарных функций и множеств, то есть, как теорию манипуляций с символами некоторых алфавитов [6; 222–236].

И если мы, обратив внимание на такую возможность, окинем общим взглядом все теории разрешения, то сразу увидим, что формулировки проблем разрешения в терминах либо манипуляций с символами, либо (что ýже) построения выводов в специальных формальных системах характерны для всех этих теорий, за исключением колмогоровской (*машины Колмогорова* строятся на использовании топологической, а не логической интуиции). Канонические исчисления и продукции Поста, элементарные формальные системы Смаллиана, словарные функции — всё это формализации логической интуиции структурирования декларативного и процедурного знания (см. следующий раздел). Даже сами числа, активно используемые в теориях разрешения, в большинстве случаев трактуются не как содержательные объекты, а как слова в некотором алфавите (однобуквенном у Поста и Маркова (палочки), двухбуквенном у Чёрча, Клини и Смаллиана, произвольном у Тьюринга и Смаллиана; кстати, то же самое мы видим в теории моделей в отношении числовых индексов). Все это позволяет объединить все теории разрешения (возможно, за исключением колмоговорской) в единый раздел логики, который можно назвать **логикой разрешения**, и который, в конечном счёте, занимается изучением структурирования знания так же, как и другие разделы логики.

Теория формальных систем объединяет в себе понятия исчисления и алгоритма, а потому обобщает все изучаемое в синтактике и логике разрешения в единый материал. При этом, как показал Маслов [8], в своих интерпретациях теория формальных систем выходит далеко за пределы области, которую непосредственно изучает логика. Эта диціплина так же, как и теория доказательств и прагматика, является прикладной частью логики; следовательно, в ней имеется логическое ядро, и внелогическая основная часть. Относительно логического ядра — теории формальных систем как объектов, частными случаями которых являются исчисления в традиционном смысле и формальные представления алгоритмов, — можно смело утверждать, что его объект изучения тот же, что и у других разделов логики.

Логическая **прагматика** одновременно расширяет логические синтаксис и семантику, вводя как особые языковые средства, употребляемые в эмпирической действительности человеческими индивидами как носителями знания и языков, так и особые модификации в рассмотрении моделей и интерпретаций языков, исчислений и теорий, которые необходимы для эмпирических рассмотрений. Эти расширения и модификации не создают нового объекта исследования для прагматики: здесь мы всё так же продолжаем изучать структуризацию знания и отношения между ним, языком и действительностью — просто акценты смещаются со знания и языка вообще на знание и языки, которыми могут обладать реальные индивиды.

Таким образом, мы видим, что знание изучается прямо либо опосредствованно во всех разделах логики — а потому мы можем принять следующий эпистемологический (и имеющий статус эмпирической гипотезы)

ТЕЗИС 1. *Знание и его связи с языком и действительностью являются объектом (изучения) логики как науки.*

Под *связями* тут и далее мы понимаем всё, что предстаёт в логике в виде функций и отношений (таким образом, сюда включаются предикаты и свойства).

Выраженная в тезисе 1 философская концепция близка к идущей от Пирса и Морриса *семиотической концепции*, согласно которой объектом логики являются символы и языковые образования и структруры, — именно поэтому современная логика и называется символической, — но всё же чётко отличается от неё. Смыслы и символы — это разные вершины треугольника Фреге, знание и язык — это разные семантические (следовательно, логические) миры. Наличие знания как объекта исследования мы проследили выше во всех разделах логики; относительно символов и языка этого сказать нельзя. Легко видеть, что символы и языковые образования не являются объектом исследования ни в теории истинностных функций, ни в традиционно понимаемой алгебре логики; в логике разрешения символы и язык являются скорее методом и инструментарием исследования, чем его объектом. Таким образом, концепция знания как объекта логики лучше справляется с охватом всех логических разделов, чем семиотическая концепция — поэтому мы и принимаем первую в виде тезиса 1.

С вопросом об объекте всякой науки тесно связан вопрос о её предмете; для рассмотрения этого последнего вопроса относительно логики следует провести некоторое дополнительное рассмотрение феномена знания.

Два вида знания

Как показал Райл в своей замечательной книге «The concept of mind» (см. рус. перевод [9]), знание бывает двух существенно отличных друг от друга видов. Мы назовём эти два вида знания декларативным и процедурным знанием соответственно.

Декларативное знание, или «знание “что”» в терминологии Райла, — это описательное знание, способ познания того, что есть в мире. Когда мы помним, как выглядит кухня у нас в квартире, или знаем, что, согласно легенде, Рим основали браться Ромул и Рем, мы обладаем декларативным знанием. Такое знание изучается в логических синтаксисе и семантике; оно может соответствовать либо не соответствовать действительности, что мы описывает в терминах обозначения и истинности.

Процедурное знание, или «знание “как”» в терминологии Райла, — это знание алгоритмическое, выражающееся в рецептах действий, а также в навыках и умениях. Именно в смысле процедурного знания мы знаем, как делить в столбик, завязывать шнурки и держать равновесие, катаясь на велосипеде. Процедурное знание изучается в логике разрешения; оно ничего не описывает в действительности, потому не вступает в семантические отношения; вместо этого оно описывает процедуры, с помощью которых можно произвести (либо предотвратить) некоторые изменения в действительности.

Наименьшую единицу декларативного знания можно назвать *смысловым атомом*; это — смысл, собственные части которого уже не являются смыслами либо вообще не могут быть выделены как таковые. Из смысловых атомов строятся все другие смыслы в обоих типах знания. В декларативном знании мы имеем *номинативные смыслы*, выражающиеся в квазитермах и термах, и *пропозициональные смыслы*, выражающиеся в квазиформулах и формулах (это так называемые семантические категории Лесневского, только на уровне смыслов).

Процедурное знание, по-видимому, не содержит атомов. Его минимальной единицей можно считать правило. В самом общем и недостаточно точном понимании *правило* — это некоторое знание (смысл) позволяющее за один (условный) шаг перейти от некоторых ранее заданных (любым способом) объектов к одному или более из вообще говоря некоторых других объектов; в граничном случае переход осуществляется от пустого множества объектов, то есть правило состоит в непосредственном задании одного или более объектов из предъявленной в правиле группы. При уточнении такой интуиции правила, его можно рассматривать с одной из двух присущих логике точек зрения: структурной, составляющей основу и метод синтактики, и процедурной, отражающей существо дела в логике разрешения.

С точки зрения синтактики правило следует понимать как *зависимость* (то же, что и введённая в пред. разделе *связь*). Здесь всякое правило имеет структурную (собственно, пропозициональную) формулировку, а именно: «Если каждый из объектов $a_1, ..., a_n$ подпадает под соответствующий ему предикат $F_1, ..., F_n$, то хотя бы один из объектов $b_1, ..., b_m$ подпадает под соответствующий ему предикат $G_1, ..., G_m$», символически:

$$\frac{F_1(a_1), ..., F_n(a_n)}{G_1(b_1), ..., G_m(b_m)}. \qquad (1)$$

Другой, менее распространённый, способ записи:

$$F_1(a_1), ..., F_n(a_n) \therefore G_1(b_1), ..., G_m(b_m).$$

Примеры. Пример 1. Правило образования слов в алфавите K: «Если Y — слово в алфавите K, и α — буква алфавита K, то Yα — слово в алфавите K».

Пример 2. Правило вывода Modus ponens: «Если $\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ суть теоремы данного исчисления C, то и $\mathfrak{G}$ — теорема исчисления C».

Если в правиле фигурирует один единственный предикат (то есть, если $F_1 \equiv ... \equiv F_n \equiv G_1 \equiv ... \equiv G_m$), и он фиксирован, его упоминание в символической записи правила опускают. К примеру, Modus ponens записывают в таком случае следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \\ \mathfrak{F}\end{array}}{\mathfrak{G}}.$$

С точки зрения логики разрешения правило следует понимать как *предписание* или указание на выполнение действия. Здесь всякое правило имеет конструктивную, или более общо: процедурную формулировку, а именно: «В условиях $A_1, ..., A_n$

можно/следует/рекомендуется/прочее сделать хотя бы одно из действий (реализовать хотя бы одну из возможностей) $B_1, ..., B_m$», символически:

$$\frac{A_1, ..., A_n}{B_1, ..., B_m} \tag{2}$$

или

$$A_1, ..., A_n \therefore B_1, ..., B_m.$$

Предписание мы понимаем максимально широко: как *побуждение* или стимул любого вида, включая нормы, директивы и приказы, угрозы, просьбы, рекомендации, разрешения и даже вызовы и провокации. Чтобы предписание можно было назвать правилом, требуется только, чтобы оно было сформулировано в общих терминах, а не имело смысл только в одном контексте.

Примеры. Пример 1 выше может быть сформулирован в процедурных терминах: «Если дано слово Y в алфавите K и буква α алфавита K, то для образования нового слова в алфавите K можно приписать α справа к Y».

Пример 3. Правилом является любая команда любого алгоритма. Например, единственная команда присоединяющего слева нормального алгорифма формулируется как «Вместо первого вхождения пустого слова в любое слово P в алфавите K следует подставить слово Q в этом же алфавите, после чего остановиться». В символической записи упоминание слова P, то есть посылку правила (см. дальше) опускают, и получается запись

$$\{ \rightarrow \bullet\, Q,$$

где фигурная скобка охватывает все команды данного алгоритма, а стрелка с точкой обозначает требуемое действие (включая остановку) и стоит между условием/посылкой (пустым словом, обозначение которого опущено) и результатом действия (Q здесь — результат замены пустого слова) [7; 146].

Формулы $F_1(a_1), ..., F_n(a_n)$, исходные для всякого правила вида (1), и формулы $A_1, ..., A_n$, исходные для всякого правила вида (2), называются *посылками* соответствующего правила, а формулы $G_1(b_1), ..., G_m(b_m)$ и $B_1, ..., B_m$ соответственно — *заключениями* этого же правила. Если правило имеет единственное заключение, то есть, имеет вид

$$\frac{F_1(a_1), ..., F_n(a_n)}{G(b)}$$

или вид

$$\frac{A_1, ..., A_n}{B},$$

будем называть его *детерминативным*. В логике используются преимущественно детерминативные правила; недетерминативные правила могут быть записаны в виде секвенций или, что то же самое, импликаций вида

$$A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee ... \vee B_m.$$

Количество посылок правила может равняться нулю; такие правила назовём *начальными*. Начальные правила определяют некоторый формальный объект (объекты) либо действие и заключение (заключения), как его результат, независимо от любых условий; все остальные правила определяют свои заключения в зависимости от наличествующих посылок как условий применения правила, а потому могут быть названы *условными*. Также, любые правила как со структурной, так и с процедурной точек зрения могут быть названы *репрезентациями* своих заключений, а детерминативные правила — *детерминациями* (структурная точка зрения) или *порождениями* (процедурная точка зрения) своих заключений; начальные правила при этом могут быть названы *прямыми* представлениями и порождениями, а условные правила — *преобразованиями* своих посылок в свои заключения. В заключении вида $G(b)$ объект b можно назвать *репрезентируемым* или, соответственно, *порождаемым объектом* правила. Если b — формула, а порождающее её правило является начальным детерминативным и принадлежит какому-либо разделу синтактики, b принято называть *аксиомой*; в более общем случае детерминативного начального правила при произвольном b, последний можно назвать *исходным* или *аксиоматическим объектом*.

Хорошо известные типы правил — это правила образования в формальных языках, правила преобразования в исчислениях и команды алгоритмов. За пределами логики легко найти другие виды правил, например, "шаги" кулинарных рецептов, этические и юридические нормы, правила этикета и проч. Все эти правила охватываются сформулированной выше общей теорией, что делает логику универсальной и фундаментальной дисциплиной для описания как декларативного, так и процедурного знания (многочисленные примеры применения логики для описания действительности в терминах процедур и правил можно найти в работе Маслова [8]).

При этом следует отметить, что если декларативное знание исследовано в логике достаточно полно — в чём можно лично убедиться, освоив теории логических синтактики и семантики, — то с процедурным знанием дело обстоит несколько хуже. На данный момент хорошо развиты только теории, описывающие алгоритмические процедуры или, говоря иначе, эффективные процессы. Общей же теории процедур, по крайней мере общепринятой, в логике до сих пор не построено.

Взглянем на правила общего вида (1) и (2). Последовательное выполнение любого ряда правил образует в действительности то, что можно назвать *процедурой*, а именно, процедурой выполнения последовательности правил (автор отдаёт себе отчёт в том, что фраза «последовательное выполнение ряда» дважды содержит указание на последовательности и выглядит тавтологично; в этой работе мы не будем касаться фундаментального для логики и знания понятия последовательности). Если все правила детерминативны и собраны в единую структуру, в пределах которой указано, какое правило выполнять после какого, и следует ли остановиться после такого выполнения, то такая структура из правил называется алгоритмом, а реализуемая ею процедура — *алгоритмической процедурой* или *эффективным (конструктивным) процессом*. Наличие единой структуры, состоящей из правил, позволяет говорить о предписании, выраженном в этой структуре как едином целом, а не о множестве предписаний, выраженных в формулировках отдельных правил. Поэтому алгоритм и характеризуется как «предписание, однозначно определяющее ход некоторых конструктивных процессов» [7; 135]. В общем же случае, процедуры не являются алгоритмическими и не направляются единым предписанием.

Попытка построить общую теорию процедур изложена Карри в [16]. Эта теория нужна для описания процедурного знания в самом общем виде. Карри использует термин «построения» там, где мы говорим о процедурах (что в переводе [1] совершенно неудачно перевели как «конструкции», хотя речь идёт не о гипостазированных объектах, каковыми являются логические предметы, а о последовательностях действий, о процессах), и о «способах комбинации» и «спецификациях» там, где мы говорим о правилах. В указанной работе в общих чертах построена теория деревьев как способа формального представления процедур в общем случае. Именно у Карри мы заимствуем термины «детерминативный» и «начальный».

Что объединяет оба вида знания при всех их взаимных отличиях? Мы утверждаем, что общими для всего знания являются принципы его структурирования, принципы образования систем знания.

Системы и структуры знания

Интуитивно будем понимать *систему* как множество, некоторые элементы которого являются связями между некоторыми другими элементами этого же множества. Множество таких связей, выделенных в системе, будем называть её *структурой*. Эти два интуитивных понятия легко могут быть уточнены с помощью понятия математической структуры. Напомним определения.

Множество всех подмножеств множества A называется *булеаном* множества A и обозначается через $\mathcal{B}$ (A). *Шкалой множеств с базисом* $\{A_1, ..., A_p\}$ (или, *с базисными множествами* $A_1, ..., A_p$) называется наименьшая совокупность множеств $S = S(A_1, ..., A_p)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) базисные множества S принадлежат S: $A_1, ..., A_p \in S$;

2) булеан всякого элемента шкалы также является элементом этой шкалы: если $M \in S$, то $\mathcal{B}(M) \in S$;

3) декартово произведение любой последовательности элементов шкалы также является элементом этой шкалы: если $M_1, ..., M_p \in S$, то $M_1 \times ... \times M_p \in S$.

Математической структурой с базисом $\{A_1, ..., A_p\}$ называется упорядоченная m-ка

$$\mathfrak{A} = <A_1, ..., A_p; R_1, ..., R_q>,$$

где $m = p + q$, $A_1, ..., A_p$ — *базисные множества* структуры $\mathfrak{A}$, а $R_1, ..., R_q$ — *главные* или *основные* отношения структуры $\mathfrak{A}$, являющиеся элементами некоторых элементов шкалы $S(A_1, ..., A_p)$.

Понятие математической структуры обладает предельной общностью: все традиционные (так сказать, докатегорные) системы математических объектов — алгебраические структуры, топологические и векторные пространства, частичные и алгебраические системы, алгебры, модели, реляционные системы — все они являются примерами математических структур.

Если теперь мы заменим в определении математической структуры теоретико-множественное понятие отношения на логическое понятие правила, мы получим хорошее представление для систем знания, изучаемых в логике. К сожалению, эту замену нельзя произвести тривиальной перетрактовкой правила как отношения, поскольку, как мы показали в предыдущем разделе, это лишь одно из двух возможных пониманий феномена правила; другое же его понимание — правило как предписание — не имеет на данный момент теоретико-множественной трактовки. Поступим следующим образом. Будем считать, что правило — это особый логический объект, отличный от известных теоретико-множественных конструкций, и понимаемый интуитивно. Положим, что n-посылочное и с m заключениями правило $\mathfrak{r}$ вида (2) (или, в частном случае, вида (1)) *определено* (или *определяется*) *на* декартовом произведении $M_1 \times ... \times M_n \times M_{n+1}$, если в качестве посылок $\mathfrak{r}$ рассматриваются только элементы множеств $M_1, ..., M_n$: $<A_1, ..., A_n> \in M_1 \times ... \times M_n$, а в качестве заключений —

только элементы множества M_{n+1}: $B_1, ..., B_m \in M_{n+1}$. Тогда мы можем назвать *логической структурой* с базисом $\{A_1, ..., A_p\}$ (не следует путать множества A_i с условиями правил A_i) упорядоченную *m*-ку

$$\mathfrak{L} = <A_1, ..., A_p; \mathfrak{r}_1, ..., \mathfrak{r}_q>, \qquad (3)$$

где $m = p + q$, а $\mathfrak{r}_1, ..., \mathfrak{r}_q$ — *главные* или *основные* правила формальной системы $\mathfrak{L}$, определённые на некоторых элементах шкалы S $(A_1, ..., A_p)$. Правила, перечисленные в записи (3), могут определяться на декартовых произведениях разных множеств, поэтому может быть удобно объединять их в одно множество $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{r}_1, ..., \mathfrak{r}_q\}$ (если они определены на одном и том же декартовом произведении), либо наоборот: разбивать их на ряд множеств $\mathfrak{R}_1 = \{\mathfrak{r}_{1,1}, ..., \mathfrak{r}_{1,i_1}\}, ..., \mathfrak{R}_r = \{\mathfrak{r}_{r,1}, ..., \mathfrak{r}_{r,i_r}\}$, где $i_1 + ... + i_r = q$ (если они определены на декартовых произведениях разных множеств, особенно, когда они образуют иерархию, в которой одни правила определены на декартовых произведениях множеств других основных правил этой же структуры). В первом случае получим запись

$$\mathfrak{L} = <A_1, ..., A_p; \mathfrak{R}>,$$

а во втором —

$$\mathfrak{L} = <A_1, ..., A_p; \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_r>.$$

Бурбаки утверждали, что каждая математическая дисциплина изучает математические структуры определённой разновидности. Мы выдвинем предположение, согласно которому всякий технический раздел логики, предполагающий и содержащий теории, оперирующие формальными объектами, занимается изучением некоторых разновидностей логических и/или математических структур. Введём и поверхностно изучим следующие логические структуры.

Наиболее обычной логической структурой является исчисление. Начиная с Карнапа [15], под исчислением принято понимать пару из множеств правил образования и преобразования, установленных соответственно над некоторым исходным запасом выражений и некоторым набором аксиом. Иногда встречаются девиантные, отличные от общепринятого, понятия исчисления (например, у Карри и Лоренцена), но они не распространены. Пост очень сильно обобщил [8; 21] обычное понятие исчисления до понятия канонического исчисления $\mathcal{CC}$ как системы $\mathfrak{R}^c$ правил вывода и множества $\mathcal{A}$ аксиом, установленных над двумя множествами исходных выражений: множеством K^c постоянных (или алфавитом исчисления) и множеством V переменных, то есть как четвёрку

$$\mathcal{CC} = <K^c, V: \mathcal{A}, \mathfrak{R}^c> \qquad (4)$$

(объяснение функции двоеточия см. в тексте после формулы (8)).

Мы видим все основания для ещё большего обобщения понятия исчисления. Назовём *исчислением* или *дедуктивной структурой* с базисом $\{A_1, ..., A_p\}$ упорядоченную *m*-ку

$$\mathcal{C} = <A_1, ..., A_p; \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_r>,$$

где $m = p + r$, а $\mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_r$ — множества *главных* или *основных* правил исчисления $\mathcal{C}$, которые (правила) определены на декартовых произведениях некоторых элементов базиса $\mathcal{C}$. Исчисление назовём *простым*, если оно имеет вид

$$\mathcal{C} = <A; \mathfrak{R}>;$$

здесь каждое *n*-посылочное правило из $\mathfrak{R}$ определено на *n*+1-вой декартовой степени A^{n+1} множества A, которое мы будем называть *носителем* исчисления $\mathcal{C}$ — подобно тому, как говорят о носителях частичных и алгебраических систем. Аналогии между простыми исчислениями и частичными системами алгебры являются предметом пока не опубликованной работы автора «Логические исчисления как алгебраические системы».

Если среди правил исчисления есть начальные, их можно выделить в отдельные множества $\mathfrak{R}_i^{[0]}$; получим исчисление

$$C = <\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}, ..., \mathrm{A}_p; \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_{k+1}, ..., \mathfrak{R}_r, \mathfrak{R}_1^{[0]}, ..., \mathfrak{R}_k^{[0]}>, \quad (5)$$

где множества $\mathfrak{R}_{k+1}, ..., \mathfrak{R}_r$ содержат только условные правила. Такое исчисление можно назвать *квазиаксиоматическим*.

Рассмотрим некоторое квазиаксиоматическое исчисление вида (5). Предположим, что все правила из $\mathfrak{R}_1^{[0]}, ..., \mathfrak{R}_k^{[0]}$ детерминативны; тогда каждое такое правило $\mathfrak{r}^{[0]}_A$ вида $\therefore A$ определяет аксиоматический объект A и может быть с ним отождествлено. Следовательно, мы можем для всякого $i \leq k$ заменить множество начальных правил $\mathfrak{R}_i^{[0]}$ на множество $\mathcal{A}_i$ отождествляемых с ними аксиоматических объектов и получить образование

$$C^{\mathcal{A}} = <\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}, ..., \mathrm{A}_p; \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_{k+1}, ..., \mathfrak{R}_r, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k>, \quad (6)$$

которое мы в силу отождествления $\mathfrak{R}_i^{[0]}$ и $\mathcal{A}_i$ также будем считать исчислением, и будем называть *аксиоматическим исчислением*. Если, дополнительно, все правила из $\mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_1^{[0]}, ..., \mathfrak{R}_k^{[0]}$ определены на декартовых произведениях множеств формул (а значит, все элемены множеств $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k$ суть формулы), исчисление (6) можно назвать *собственно аксиоматическим*. Заметим, что в собственно аксиоматических исчислениях все множества аксиом (а в аксиоматических исчислениях — некоторые из множеств аксиом, соответственно, в квазиаксиоматических исчислениях — некоторые из множеств начальных правил) могут быть пустыми. Такие исчисления мы будем называть (*чистыми*) *системами вывода*.

Исчисления, обычно рассматриваемые в логике, являются именно аксиоматическими. Однако, при этом множества-носители $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_p$ всякого аксиоматического исчисления не считаются заранее заданными, но предполагаются строящимися в процессе применения главных правил исчисления сначала к аксиоматическим объектам, затем к результатам собственного применения и т. д. до бесконечности [8; 7]. Именно в этом усматривают отличие формальных систем логики от систем алгебры [1; 110] (и более общо, от математических структур). Системы, состоящие из (I) некоторого запаса исходных объектов и (II) некоторой системы правил образования новых объектов, можно, следуя Маслову, назвать *дедуктивными*. При нашем подходе такие системы не требуют отдельной формулировки, но являются частным случаем аксиоматических исчислений, в котором носители таких исчислений пусты. Договоримся считать, что *дедуктивная система* — это аксиоматическое исчисление вида

$$C^{D\mathcal{A}} = <\varnothing; \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_{k+1}, ..., \mathfrak{R}_r, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k>; \quad (7)$$

в частности, простая дедуктивная система — это простое исчисление, являющееся дедуктивной системой, то есть, логическая структура вида

$$C^{D\mathcal{A}} = <\varnothing; \mathfrak{R}, \mathcal{A}>.$$

Последнее соответствует неявному определению Маслова. При этом, ради интуитивной простоты, мы можем опустить в записи дедуктивной системы символ пустого носителя, а множества начальных объектов поставить перед множествами правил, так как с интуитивной точки зрения мы начинаем именно с начальных, исходных объектов, и только потом привлекаем к рассмотрению правила; получим:

$$C^{D\mathcal{A}} = <\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k: \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_r>. \qquad (8)$$

Здесь, чтобы не было путаницы с установленными выше обозначениями (3)–(7), мы заменяем точку с запятой на двоеточие. Записи (7) и (8) равносильны, то есть в каждом отдельном случае репрезентируют одно и то же исчисление.

Относительно фиксированного аксиоматического исчисления $C^{\mathcal{A}}$ любая последовательность, каждый элемент *a* которой является либо исходным объектом (то есть, элементом одного из множеств $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k$), либо заключением одного из правил-элементов какого-либо из множеств $\mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_r$, применённых к *n*-ке элементов этой же последовательности, предшествующей данному *a*, называется *выводом в* $C^{\mathcal{A}}$; вывод в любом $C^{\mathcal{A}}$ называется выводом своего последнего элемента, который, в свою очередь, называется *выводимым в* $C^{\mathcal{A}}$. Множество выводимых в $C^{\mathcal{A}}$ объектов обозначим через ‘D($C^{\mathcal{A}}$)’. Если вывод состоит из формул, то он называется *доказательством* в $C^{\mathcal{A}}$, а его выводимый объект называется *доказуемой* формулой или *теоремой* $C^{\mathcal{A}}$. Множество всех теорем $C^{\mathcal{A}}$ можно обозначить через ‘T($C^{\mathcal{A}}$)’ или просто ‘T’, если $C^{\mathcal{A}}$ фиксировано.

Множества выводимых в аксиоматических исчислениях объектов вполне аналогичны множествам, порождённым подмножествами носителей математических структур, если представить аксиоматические исчисления в виде

$$C^{D} = <\mathrm{D}(C^{\mathcal{A}}); \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_{k+1}, ..., \mathfrak{R}_r, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k>.$$

Эта аналогия может быть превращена в строгую эквивалентность (см. теорему 2 в статье автора «Логические исчисления как алгебраические системы»), поэтому впредь всякое множество, порождённое некоторым множеством $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{A}$ в математической структуре $\mathfrak{A} = <\mathrm{A}; R_1, ..., R_q>$, будем обозначать через ‘D($\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}$)’, где $\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}$ — обогащённая структура $\mathfrak{A}_{\mathrm{C}} = <\mathfrak{A}, \mathrm{C}> = <\mathrm{A}; R_1, ..., R_q, \mathrm{C}>$.

Теперь мы покажем, какие логические либо математические структуры изучаются в каждом крупном разделе логики.

Теория истинностных функций изучает две взаимосвязанные алгебры: алгебру высказываний $\mathfrak{A}_P = <\mathrm{A}^P; \neg, \wedge, \vee, \nabla, \rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow>$, где A^P — непустое множество высказываний, замкнутое относительно всех операций из $\mathfrak{A}_P$ (символику операций читатель может расшифровать сам), и алгебру истинностных значений $\mathfrak{A}_B = <\{1, 0\}; \neg, \wedge, \vee, \nabla, \rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow>$, где 1 — это истина, а 0 — ложь. Обе эти алгебры сводятся к булевым алгебрам $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}{}_P = <\mathrm{A}^P; \neg, \wedge, \vee>$ и $\mathfrak{A}^{\mathcal{B}}{}_B = <\{1, 0\}; \neg, \wedge, \vee>$, последняя из которых вырожденная.

Алгебра логики в традиционном понимании является теорией вырожденных алгебр вида $\mathfrak{A}_B = <\{1, 0\}; \Omega_{\mathcal{B}F}>$, где объекты 1 и 0 являются формальными, и могут интерпретироваться не только как истина и ложь соответственно, но и многими другими способами, а $\Omega_{\mathcal{B}F}$ — множество всевозможных *булевых функций* (*операций*) с алфавитом $\mathrm{B} = \{1, 0\}$, то есть операций вида $f^{(n)}: \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}$ (мы пишем ‘→’ вместо традиционного для математиков ‘→’, чтобы отличать этот знак от знака импликации). *k*-значные логики являются тривиальными обобщениями алгебры логики в описанном узком смысле на случай *k*-элементного множества $\mathrm{B} = \{0, 1, ..., k–1\}$ и могут быть включены в неё.

При расширенном понимании алгебры логики в неё следует включать также теории алгебраического представления логических объектов и структур (цилиндрические и полиадические алгебры, сколемовские импликативные и субстрактивные решётки), а также теорию решёток исчислений и теорий. Здесь, как и в теории истинностных функций и в алгебре логики как теории булевых или *k*-значных функций мы везде имеем дело с математическими структурами: алгебрами и решётками. Однако элементы этих структур либо непосредственно являются единицами и фрагментами знания (высказывания), либо языковыми репрезентациями таких фрагментов (исчисления, теории). Неочевидным является статус структур знания лишь в случае булевых и *k*-значных функций, которые могут интерпретироваться многими способами, выходящими за пределы логики в частности и проблематики знания вообще; к примеру, алгебру логики давно и успешно интерпретируют на релейно-контактных схемах; возможны также многочисленные интерпретации *k*-значных логик в математической физике [10]. Однако, следует заметить, что логические интерпретации булевых операций являются первоначальными исторически и систематически, поэтому мы не особо погрешим против истины, если все внелогические и тем более не связанные со знанием интерпретации алгебры логики буде считать её прикладными расширениями, а не существенной частью, не собственно ядром.

Разделы синтактики следует рассматривать отдельно.

Теория формальных языков имеет дело с логическими структурами, состоящими из алфавитов как непустых множеств символов (знаков) и установленных над ними систем *правил образования (правильных) выражений* (*правильных слов*) в этих алфавитах. Если K — алфавит, а множество правил образования назвать *грамматикой* и обозначить через ‘ϕ’, тогда можно определить *формальный язык* как дедуктивную систему

$$\mathrm{L} = \langle \mathrm{K}: \phi \rangle. \qquad (9)$$

Такое определение отличается от принятого в теории моделей и ряде алгоритмических теорий, где под формальным языком понимают множество всех слов (выражений) в данном алфавите [5; 138], — зато следует синтактической традиции, идущей от Карнапа, полностью ложится во введённые в данной работе определения логических структур и, кроме всего прочего, хорошо согласовывается с интуициией: ведь интуитивно любой язык — это система средств выражения, а не множество полученных с помощью этой системы результатов, которые (результаты) образуют, согласно здравому смыслу, речь либо систему текстов, но не язык как таковой. Исходя из этого, автор в своих последних работах отказался от теоретико-модельного определения формального языка в пользу определения (9). Множество всех слов формального языка L с алфавитом K можно, в таком случае, обозначить через ‘E(L)’, ‘E(K)’ или, даже, просто ‘E’, если K фиксирован; это позволяет утверждать, что для всяких K и ϕ имеет место равенство

$$\langle \mathrm{K}: \phi \rangle = \langle \varnothing; \phi, \mathrm{K} \rangle = \langle \mathrm{E}; \phi, \mathrm{K} \rangle.$$

Множество выводимых в L (то есть, правильных) слов будем называть *нормой* языка L и обозначим через ‘N(L)’.

Логический синтаксис занимается изученим исчислений в традиционном для логики понимании, а последние трактуются как расширения формальных языков за счёт введения для каждого языка множества $\mathcal{A}$ аксиом из числа формул соответствующего языка и множества $\mathfrak{R}^{\mathrm{t}}$ правил преобразования множеств формул в формулы (или в множества формул в случае секвенций). Получаем дедуктивную систему

$$\mathcal{C}^{D\mathcal{A}} = \langle \mathrm{K}, \mathcal{A}: \phi, \mathfrak{R}^{\mathrm{t}} \rangle = \langle \varnothing; \phi, \mathfrak{R}^{\mathrm{t}}, \mathrm{K}, \mathcal{A} \rangle. \qquad (10)$$

Из неё можно отдельно выделить *исчисление теорем* как дедуктивную систему

$$\mathcal{C}^T = <\mathcal{A}: \mathfrak{R}^t> = <\varnothing; \mathfrak{R}^t, \mathcal{A}>.$$

В некоторых натуральных исчислениях множество аксиом пусто. Такие исчисления мы выше условились называть системами вывода.

Вопрос подразделения исчислений синтаксиса на логические и прикладные требует рассмотрения состава алфавитов и потому выходит за рамки данной работы.

Теория доказательств является продолжением и надстройкой над синтаксисом. Формально, *теория* — это непустое множество предложений в некотором формальном языке L; однако, на практике в теории доказательств изучают исключительно аксиоматизируемые теории, то есть такие теории Th, которые являются множествами теорем, выводимых в некотором аксиоматическом исчислении, — то есть, для которых справедливо равенство

$$\mathrm{Th} = \mathrm{T}(<\mathrm{K}, \mathcal{A}: \phi,\ \mathfrak{R}^t>) = \mathrm{T}(<\varnothing; \phi,\ \mathfrak{R}^t, \mathrm{K}, \mathcal{A}>) = \mathrm{T}(<\mathrm{E}(\mathrm{K}); \phi,\ \mathfrak{R}^t, \mathrm{K}, \mathcal{A}>).$$

Поэтому, в конечном счёте, изучение теорий сфодится к изучению аксиоматизирующих их исчислений.

Таким образом, все разделы синтактики изучают дедуктивные системы и множества выводимых в них объектов; непосредственно это изучение имеет дело с символами и символьными образованиями, то есть, является семиотическим — однако, как отмечалось в первом разделе данной работы, здесь изучаются только такие символьные образования, которым можно придать смысл, и которые призваны правильно и точно отображать логическую структуру таких смыслов.

Логическая семантика по определению изучает отношения между структурами знания, языка и действительности. Фундамент семантики — треугольник Фреге — является теорией отношений между смыслами, выражениями языка и элементами и фрагментами действительности. Если $i, j, k \in I$, $\{\mathfrak{a}_i\}$, $\{a_j\}$, $\{\alpha_k\}$ суть непустые множества соответственно смыслов, выражений (не обязательно выражений фиксированного языка) и денотатов, а Ω_R, $\mathfrak{R}^F$ — множества сответственно отношений и правил, определённых на любых декартовых произведениях множеств $\{\mathfrak{a}_i\}$, $\{a_j\}$, $\{\alpha_k\}$, то треугольник Фреге есть теория реляционных систем вида

$$\mathfrak{A}^R = <\{a_j\}, \{\mathfrak{a}_i\}, \{\alpha_k\}; \Omega_R>$$

и исчислений вида

$$\mathcal{C}^S = <\{a_j\}, \{\mathfrak{a}_i\}, \{\alpha_k\}; \mathfrak{R}^F>.$$

В настоящее время, к сожалению, ни те, ни другие системы не разработаны подробно. Разработана только теория отношений между выражениями и денотатами, имеющая название теории моделей. Пусть дан формальный язык $\mathrm{L} = <\mathrm{K}: \phi>$, $\{a_j\} = \mathrm{N(L)}$, $\{\alpha_k\} = \mathrm{A}$, и даны математическая структура $\mathfrak{A} = <\mathrm{A}; R_1, ..., R_q>$ и исчисление $\mathcal{C}^D = <\mathrm{K}, \mathcal{A}: \phi, \mathfrak{R}^t>$. Теория моделей занимается изучением отношений между

- элементами N(L) и элементами множества $\mathrm{A} \cup R_1 \cup ... \cup R_q$ (а именно, отношения интерпретации «α_k является интерпретантом для a_j»),
- элементами N(L) и структурой $\mathfrak{A}$ (а именно, отношений выполнимости и тождественной истинности формул из N(L) на $\mathfrak{A}$),
- свойств исчисления $\mathcal{C}^D$ и множества его теорем $\mathrm{T}(\mathcal{C}^D)$ относительно всего множества структур вида $\mathfrak{A}$, отличающихся только составом носителя и/или главными отношениями.

В качестве математических структур $\mathfrak{A}$ обычно рассматривают *модели* $\mathfrak{M}$ = <A; Ω_P>, где Ω_P — множества предикатов вида $P^{(n)}$: $A^n \to B$ (B = {1, 0}), или *частичные системы* $\mathfrak{A}$ = <A; Ω_F, Ω_P>, где Ω_F — множества частичных операций вида $F^{(n)}$: $A^n \to A$.

Разделы логики разрешения имеют каждый свою специфику.

Теория алгоритмов и **машин Тьюринга** имеет дело с предписаниями (алгоритмами), имеющими вид правил манипулирования с символами фиксированного алфавита K и словами в K, то есть, с вербальными алгоритмами. Имеются разные определения особых типов вербальных алгоритмов, к которым можно свести все остальные. Рассмотрим две формулировки.

Нормальные алгорифмы Маркова задаются каждый алфавитами K (основной) и K_0 (состоит из букв-разделителей), схемой слов в алфавите $K \cup K_0$, являющей собой множество $\mathfrak{R}$ правил подстановки, а также множеством условий, вводящих структуру на множестве $\mathfrak{R}$ [7]. Исходя из структурной точки зрения, представленной в данной работе, нормальные алгорифмы можно описать следующим образом. Пусть даны алфавит K, множество $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{r}_1, ..., \mathfrak{r}_n\}$ правил подстановки вида «вместо первого вхождения слова X в слово P подставить слово Y», которые изображаются без ссылки на P, то есть как ‘X ∴ Y’, а потому определяются на декартовом квадрате $(E(K))^2$, и множество правил, определённых на множествах правил из $\mathfrak{R}$, а именно: начальное правило ${}^2\mathfrak{r}_{0,i}$: ‘F(P) ∴ G(P, $\mathfrak{r}_i$)’ «Если на вход алгоритма подано слово P, применить к нему правило $\mathfrak{r}_i$», множество правил перехода ${}^2\mathfrak{R} = \{{}^2\mathfrak{r}_1, ..., {}^2\mathfrak{r}_n, {}^2\mathfrak{r}_1^*, ..., {}^2\mathfrak{r}_n^*\}$ вида ${}^2\mathfrak{r}_k$: P = $\mathfrak{r}_i$(X) ∴ G(P, $\mathfrak{r}_j$) «Если рабочее слово P получено применением правила $\mathfrak{r}_i$ к какому-либо слову X, применить к нему правило $\mathfrak{r}_j$», либо ${}^2\mathfrak{r}_k$: P = $\mathfrak{r}_i$(X) ∴ G(P, ${}^2\mathfrak{r}^\circ$) «Если рабочее слово P получено применением правила $\mathfrak{r}_i$ к какому-либо слову X, применить к нему правило ${}^2\mathfrak{r}^\circ$» и вида ${}^2\mathfrak{r}_k^*$: ¬! $\mathfrak{r}_i$(P) ∴ G(P, $\mathfrak{r}_l$) «Если правило $\mathfrak{r}_i$ неприменимо к рабочему слову P, применить к нему правило $\mathfrak{r}_l$», а также *заключительное* правило или правило останова ${}^2\mathfrak{r}^\circ$ «Остановиться (прекратить работу алгоритма)», которое мы не будем символизировать. Правило $\mathfrak{r}_i \in \mathfrak{R}$ в терминологии Маркова называется заключительным, если оно упоминается в некотором правиле ${}^2\mathfrak{r}_k$: P = $\mathfrak{r}_i$(X) ∴ G(P, ${}^2\mathfrak{r}^\circ$); мы избрали другой способ описания, в котором правила подстановки из $\mathfrak{R}$ не подразделяются на простые и заключительные; также, мы упорядочиваем $\mathfrak{R}$ не непосредственно, а с помощью условий, выраженных в правилах из множества ${}^2\mathfrak{r}_{0,i} \cup {}^2\mathfrak{R} \cup {}^2\mathfrak{r}^\circ$; также, нам не нужен дополнительный алфавит K_0, поскольку мы пользуемся правилами, а не схемами слов. В итоге, нормальный алгорифм мы опишем как логическую структуру

$$\mathfrak{al}^N = \langle E(K);\ \mathfrak{R},\ {}^2\mathfrak{r}_{0,i},\ {}^2\mathfrak{R},\ {}^2\mathfrak{r}^\circ\rangle.$$

Алгоритмы, исполняемые на машинах Тьюринга, возьмём в формулировке Эббинхауса и Мана [14] как предписания, задаваемые таблицей переходов и выходов. Каждая строка такой таблицы T имеет вид

$$q_j\, a_k\, v_{jk}\, q_{jk},$$

где $0 \le j \le s$, $0 \le k \le t$, $q_{jk}, \in \{q_0, ..., q_s\} = K_q$ = множество (имён) состояний данной машины Тьюринга, $v_{jk}, \in K \cup \{a_0, \mathrm{r}, \mathrm{l}, \mathrm{s}\}$, $K = \{a_1, ..., a_t\}$ = рабочий алфавит алгоритма с таблицей T, a_0 — пустая буква, r — команда «Сдвинуться на одну ячейку вправо», l — команда «Сдвинуться на одну ячейку влево», s — команда «Остановиться»; q_j — это текущее состояние машины Тьюринга M(T), имеющей таблицу T, a_k — буква, записанная в рабочую ячейку, v_{jk} — действие, которое следует совершить в условиях <q_j, a_k> (записать или стереть букву, записанную в рабочей ячейке, сдвинуться на ячейку влево или вправо, либо остановиться), наконец, q_{jk} — следующее после q_j

состояние машины M(T), в которое ей следует перейти после выполнения действия v_{jk} в условиях $<q_j, a_k>$ [14; 27]. Строки таблицы T очевидно являются правилами, определёнными на парах пар вида $<<q_j, a_k>, <v_{jk}, q_{jk}>>$ и поэтому могущие быть истолкованными как правила, преобразующие пары вида $<q_j, a_k>$ в пары вида $<v_{jk}, q_{jk}>$. Если обозначить множество таких правил через '$\mathfrak{R}^{\mathrm{T}}$' и положить $\mathrm{K_c} = \{\mathrm{r, l, s}\}$, алгоритм работы машины M(T) может быть представлен как логическая структура

$$\mathfrak{al}^T = <\mathrm{K}, \mathrm{K}_q, \{a_0\}, \mathrm{K_c}; \mathfrak{R}^{\mathrm{T}}>.$$

Этот же алгоритм можно представить по-другому. Рассмотрим явно правила $\mathfrak{r}_{\mathrm{r}}$ «Сдвинуться на одну ячейку вправо», $\mathfrak{r}_{\mathrm{l}}$ «Сдвинуться на одну ячейку влево», $\mathfrak{r}_{\mathrm{s}}$ «Остановиться» и множества правил вида $\mathfrak{r}_{a_k}$ «Записать в рабочую ячейку букву a_k» (в случае $k = 0$ это означает: «Стереть из рабочей ячейки записанную букву, если она там есть») и $\mathfrak{r}_{q_j}$ «Перейти в состояние q_j»; объединим их в множества $\mathfrak{R}^{\mathrm{s}} = \{\mathfrak{r}_{a_0}, ..., \mathfrak{r}_{a_t}, \mathfrak{r}_{\mathrm{r}}, \mathfrak{r}_{\mathrm{l}}, \mathfrak{r}_{\mathrm{s}}\} = \{\mathfrak{r}_0, ..., \mathfrak{r}_{t+1}\}$, $\mathfrak{R}^q = \{\mathfrak{r}_{q_0}, ..., \mathfrak{r}_{q_s}\} = \{\mathfrak{r}'_0, ..., \mathfrak{r}'_s\}$. Установим дополнительно *правила выхода* вида ${}^2\mathfrak{r}^a_{j,k}$: $F_q(q_j), F_a(a_k) \therefore \mathrm{G}(\mathfrak{r}_i)$ «Если состояние машины M(T) — q_j, а в рабочей ячейке записан символ a_k, применить правило $\mathfrak{r}_i \in \mathfrak{R}^{\mathrm{s}}$» и *правила перехода* вида ${}^2\mathfrak{r}^q_{j,k}$: $F_q(q_j), F_a(a_k) \therefore \mathrm{G}(\mathfrak{r}'_l)$ «Если состояние машины M(T) — q_j, а в рабочей ячейке записан символ a_k, применить правило $\mathfrak{r}'_l \in \mathfrak{R}^q$», которые объединим в множества $\mathfrak{R}^{\mathrm{ex}} = \{{}^2\mathfrak{r}^a_{0,0}, ..., {}^2\mathfrak{r}^a_{s,t}\}$, $\mathfrak{R}^{\mathrm{tr}} = \{{}^2\mathfrak{r}^q_{0,0}, ..., {}^2\mathfrak{r}^q_{s,t}\}$. Работа алгоритма $\mathfrak{al}^T$ при таком представлении состоит в применении к паре исходных посылок вида $F_q(q_j), F_a(a_k)$ «Текущее состояние есть q_j» и «Символ в рабочей ячейке есть a_k» одновременно двух правил ${}^2\mathfrak{r}^a_{j,k} \in \mathfrak{R}^{\mathrm{ex}}$ и ${}^2\mathfrak{r}^q_{j,k} \in \mathfrak{R}^{\mathrm{tr}}$. То есть, алгоритм $\mathfrak{al}^T$ оперирует не отдельными правилами, а парами правил, и может быть представлен как структура

$$\mathfrak{al}^T = <\mathrm{K}, \mathrm{K}_q, \{a_0\}, \mathrm{K_c}; \mathfrak{R}^{\mathrm{s}}, \mathfrak{R}^q, \mathfrak{R}^{\mathrm{ex}} \times \mathfrak{R}^{\mathrm{tr}}>.$$

Как видно, вербальные алгоритмы — и нормальные, и машинные — являются логическими структурами, но не исчислениями, так как включают в себя множества правил, определённых не на носителях структуры, а совместно на носителях и множествах других основных правил данной структуры.

Теория рекурсивных функций, как показал Мальцев [6], может быть истолкована как теория, изучающая алгебры операторов над множествами функций. А именно, пусть среди всех частичных операций на множестве натуральных чисел $\mathbf{N} = \{x\}$ выделены константная функция $\boldsymbol{0}$, тождественно равная нулю, функция следования $\boldsymbol{s}^{(1)} = x + 1$, функции $\boldsymbol{I}^{(n)}_m$ выбора m-ного аргумента среди n заданных для всех $n, m \in \mathbf{N}$, а на всём множестве $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ указанных частичных операций для каждого $i \geq 2$ заданы операторы суперпозиции $\boldsymbol{S}^{(i)}$ (они же операторы регулярной подстановки), оператор примитивной рекурсии $\boldsymbol{R}$ и оператор наименьшего числа $\boldsymbol{M}$; тогда естественно появляются частичные алгебры

$$\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}} = <\mathscr{F}_{\mathbf{N}}; \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^{(2)}, \boldsymbol{S}^{(3)}, ...>$$

и

$$\mathfrak{A}^{\mathscr{R}}_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}} = <\mathscr{F}_{\mathbf{N}}; \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^{(2)}, \boldsymbol{S}^{(3)}, ...>,$$

а также подалгебра последней

$$\mathfrak{A}^{\mathscr{G}}_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}} = <\mathscr{F}_{\mathbf{N}}^{\circ}; \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^{(2)}, \boldsymbol{S}^{(3)}, ...>,$$

где $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}^{\circ}$ — множество всюду определённых функций из $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$. Множество примитивно рекурсивных (соответственно, частично рекурсивных или общерекурсивных) функций $\mathscr{P}$ (соответственно, $\mathscr{R}$ или $\mathscr{G}$) — это множество, порождённое в алгебре $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}}$

(соответственно, $\mathfrak{A}^{\mathcal{R}}{}_{\mathcal{F}_{\mathbf{N}}}$ или $\mathfrak{A}^{\mathcal{G}}{}_{\mathcal{F}_{\mathbf{N}}}$) множеством функций $\mathrm{Pr}_{\mathbf{N}} = \{\boldsymbol{0}\} \cup \{\boldsymbol{s}^{(1)}\} \cup \{\boldsymbol{I}^{(n)}{}_{m}\}$. Отсюда, теория рекурсии изучает, главным образом, порождённую частичную алгебру

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{P}} = <\mathrm{D}(<\mathfrak{A}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{F}_{\mathbf{N}}}, \mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}>); \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^{(2)}, \boldsymbol{S}^{(3)}, ...>$$

примитивно рекурсивных функций, порождённую частичную алгебру

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{R}} = <\mathrm{D}(<\mathfrak{A}^{\mathcal{R}}{}_{\mathcal{F}_{\mathbf{N}}}, \mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}>); \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^{(2)}, \boldsymbol{S}^{(3)}, ...>$$

частично рекурсивных функций и порождённую алгебру

$$\mathfrak{A}^{\mathcal{G}} = <\mathrm{D}(<\mathfrak{A}^{\mathcal{G}}{}_{\mathcal{F}_{\mathbf{N}}}, \mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}>); \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^{(2)}, \boldsymbol{S}^{(3)}, ...>$$

общерекурсивных функций.

Описанная так теория рекурсии выглядит как содержательная математическая дисциплина. Однако, она тривиальным образом превращается в формальную логическую теорию, если множество натуральных чисел заменить на произвольное бесконечное множество $\mathrm{M} = \{x\}$, в котором заранее выделен некоторый элемент $\boldsymbol{a}$, и истолковать функцию $\boldsymbol{0}$ как тождественно равную $\boldsymbol{a}$, а функцию следования $\boldsymbol{s}$ — как произвольную функцию, применимую к $\boldsymbol{a}$, отображающую всякий объект $x \in \mathrm{M}$ в объект $x' \in \mathrm{M}$ и подчиняющуюся аксиомам Пеано, в которых 0 заменён на $\boldsymbol{a}$. Назовём всякое множество $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_{\{a\}})$, где $\mathfrak{A}_{\{a\}} = <\mathrm{M}; \boldsymbol{s}, \{\boldsymbol{a}\}>$, *натуральным*. Тогда мы будем иметь формальную логическую теорию натуральных множеств (интерпретациями которой будут теория натуральных чисел, теория словарных функций и, может быть, другие содержательные теории) и построенную над ней теорию рекурсии как теорию частичных алгебр $\mathfrak{A}^{\mathcal{P}}{}_{\mathrm{M}}$, $\mathfrak{A}^{\mathcal{R}}{}_{\mathrm{M}}$, $\mathfrak{A}^{\mathcal{G}}{}_{\mathrm{M}}$, определённых для произвольных $\mathrm{Pr}_{\mathrm{M}} = \{\boldsymbol{0}\} \cup \{\boldsymbol{s}^{(1)}\} \cup \{\boldsymbol{I}^{(n)}{}_{m}\}$ и таких, частными случаями которых будут частичные алгебры $\mathfrak{A}^{\mathcal{P}}$, $\mathfrak{A}^{\mathcal{R}}$, $\mathfrak{A}^{\mathcal{G}}$.

Теория λ-конверсии и **комбина́торная логика** представляют собой теории специальных исчислений $\mathcal{C}^{\mathcal{D}\mathcal{A}}$ вида (10). От исчислений логического синтаксиса их отличает только работа с переменными: в λ-исчислениях связывание переменных производится специальным оператором функциональной абстракции λ, а в комбинаторной логике переменных нет вообще. В данной работе мы рассматриваем только самые общие аспекты логических структур, не зависящие от подразделения символов алфавитов на постоянные и переменные, а потому не можем обсуждать эти детали. При нашем подходе на теорию λ-конверсии и комбинаторную логику автоматически переносится всё, сказанное об исчислениях синтаксиса.

Теория формальных систем, как уже отмечалось, обобщает понятия исчисления в традиционном понимании, то есть, синаксического исчисления вида (10), и алгоритма в единое общее понятие формальной системы. Известны формулировки теории формальных систем, принадлежащие Посту (исторически изначальная), Смаллиану и Карри.

Формальные системы в формулировке Поста имеют вид канонических исчислений (4).

Смаллиан опускает разделение исходных символов на постоянные и переменные (технические этого можно добиться, полагая $\mathrm{V} = \varnothing$) и называет получающиеся структуры *математическими системами* [11; 25]. Поскольку же эти постовские системы довольно громоздки в практическом обращении [8; 17], Смаллиан описывает их структуру, которую он характеризует как «определение по рекурсии» [11; 16], в виде введённых им *элементарных формальных систем* (ЭФС), имеющих вид

$$\mathscr{E} = <\mathrm{K^c}, \mathrm{V}, \mathbf{\Omega}_P, \{\rightarrow\}, \{,\}: \mathscr{A}>,$$

где $\mathbf{\Omega}_P$ — множество предикатных выражений, знак импликации и запятая как разделитель очевидны (Смаллиан почему-то объединяет их в единый алфавит), а остальные символы тождественны аналогичным в задании канонических исчислений. Особенностью ЭФС является отсутствие в них логической либо математической структуры в общем и явном виде: правила (рассматриваемые как отношения), определённые на последовательностях множеств объектов всякой $\mathscr{E}$, не являются частью $\mathscr{E}$, а зачисляются в (мета)теорию ЭФС как систем. Эта теория описывает исчисления в смысле Карнапа, то есть вида (10), где $\mathrm{K} = \mathrm{K^c} \cup \mathrm{V} \cup \mathbf{\Omega}_P \cup \{\rightarrow\} \cup \{,\}$, ϕ содержит правило образование термов как непустых слов в алфавите $\mathrm{K^c} \cup \mathrm{V}$, правило образования (правильно построенных) атомарных формул как слов вида $P^{(n)}t_1, ..., t_n$, где $P^{(n)} \in \mathbf{\Omega}_P$, а $t_1, ..., t_n$ суть термы, и правил образования (правильно построенных) формул как атомарных формул и слов вида $\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2 \rightarrow ... \rightarrow \mathfrak{F}_n$, где каждое $\mathfrak{F}_i$ есть атомарная формула, а при чтении действует ассоциация справо, в то время как $\mathfrak{R}^t$ содержит правило подстановки слов в $\mathrm{K^c}$ вместо переменных и правило МР. Далее вводится понятие представимости в ЭФС и формальной представимости над $\mathrm{K^c}$, которые позволяют математические в терминах Смаллиана системы называть формальными, если они представимы над $\mathrm{K^c}$. В результате, любая така система формализуется в подходящей ЭФС с помощью исчисления только что описанного вида.

Карри описывает формальные системы как структуры вида

$$\mathscr{FS} = <\mathrm{A}, \mathbf{\Omega}_P; \mathfrak{R}^t, \mathscr{A}>,$$

где $\mathrm{A} \cap \mathbf{\Omega}_P = \varnothing$, и подразделяет их на две пересекающихся разновидности: *синтаксических систем*, в которых A = N(L) для подходящего формального языка L, и *об-систем* (или, объектных систем), где A произвольно. Если сравнивать формальные системы Карри с каноническими исчислениями и ЭФС, следует отметить, что роль множества A в первых такова, что для подходящих $\mathscr{CC}$, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{FS}$ $\mathrm{A} = \mathrm{D}(\mathscr{E}) = \mathrm{D}(\mathscr{FS})$.

Как видим, формальные системы во всех формулировках являются разновидностью логических структур, а именно, суть дедуктивные структуры (исчисления). При этом дополнительно предполагается, что в любой формальной системе элементы её носителя A изображаются в некотором формальном языке L и далее рассматриваются только в рамках определений и правил системы, без привлечения интуиции; более того, в большинстве формальных систем элементы A не имеют содержания вообще, а являют собой чистую структуру, рассматриваемую исключительно через её языковую форму; соответственно, такие формальные объекты могут иметь множество различных интерпретаций на одной и той же модели (к примеру, атомарная формула $F(a)$ какого-либо исчисления предикатов может на фиксированной модели в качестве интерпретанта иметь любое допустимое атомарное высказывание).

Именно поэтому и говорят о *формальных* системах. В этом отношении предмет теории формальных систем несколько ýже, чем предмет теории дедуктивных структур, поскольку логические структуры могут и не быть формальными; например, структура (алгоритм), описывающая преобразования машинных состояний компьютеров определённой реализации, будет не формальной, а содержательной. С другой стороны, в качестве формальных систем в логике рассматриваются не только логические в нашем определении структуры, но и структуры математические; а именно, таковыми являются алгебры булевых и k-значных функций логики, а также сколемовские структуры. В этом отношении предмет теории формальных систем шире, чем предмет теории логических структур.

Следовательно, мы можем рассматривать теорию логических структур как дополнение к теории формальных систем. Следует также отметить, что логические структуры и формальные системы имеют множество внелогических и даже внематематических интерпретаций. Ряд таких важных и интересных интерпретаций в области математической физики, генетики, экономики и психологии имеется в работах Рвачёва [10] и Маслова [8]. При этом, мы имеем все основания утверждать, что все интерпретации исследуемых систем могут быть разбиты на внутрилогические и внешние, и по этому признаку в теориях формальных систем и логических структур могут быть выделены собственно логическое ядро и прикладная часть. Логическое же ядро имеет дело с интерпретациями в знании, что является основным защищаемым нами тезисом.

Логическая прагматика расширяет структуры синтактики и семантики для адаптации их к описанию эмпирических процессов оперирования людьми знанием и языком. Никаких новых структур здесь не появляется, поэтому к прагматике относится всё, сказанное выше относительно синтактики и семантики.

Таким образом, мы рассмотрели все основные разделы логики и убедились, что в них исследуются логические и математические структуры, причём либо эти структуры непосредственно являются системами и структурами знания, как в теории истинностных функций, либо главными или даже единственными интерпретациями таких структур, если они формальны, являются системы знания, либо, наконец, исследуются отношения между структурами знания, языка и действительности. Поэтому мы можем считать вполне обоснованным следующий эпистемологический

ТЕЗИС 2. *Предметом (исследования) логики как науки являются системы и структуры знания, а также отношения между ними и структурами языка и действительности.*

Остаётся только прокомментировать отношение между введёнными в начале данного раздела статьи чисто интуитивными понятиями системы и структуры и введёнными позже строгими понятиями математической и логической структур. Интуитивное понятие структуры, которой наделено некоторое исходное множество либо список исходных множеств объектов (базис) совпадает с объединением строгих понятий математической и логической структур, так как любые отношения и правила задаются на каких-либо заранее определённых множествах и без этого являются просто непонятными и не определёнными. Таким образом, интуитивно структуры также распадаются на логические и математические. Далее, если следовать интуиции системы как множества, некоторые элементы которого являются связями между некоторыми другими элементами этой же системы, тогда под математической системой, наделённой структурой $\mathfrak{A} = \langle A_1, ..., A_p; R_1, ..., R_q \rangle$, можно будет понимать множество $\mathfrak{S}^M{}_{\mathfrak{A}} = A_1 \cup ... \cup A_p \cup \{R_1, ..., R_q\}$, а под логической системой, наделённой структурой $\mathfrak{L} = \langle A_1, ..., A_p; \mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_r \rangle$ — множество $\mathfrak{S}^L{}_{\mathfrak{L}} = A_1 \cup ... \cup A_p \cup \mathfrak{R}_1 \cup ... \cup \mathfrak{R}_r$. Понятно, что так определённые системы можно отождествлять со структурами, которыми наделены их базисы — то есть можно полагать, что $\mathfrak{S}^M{}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{S}^L{}_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$.

Литература

1. *Карри Х. Б.* Основания математической логики. Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 568 с.

2. *Клини С. К.* Математическая логика. Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
3. *Кохан Я.* Логічна можливість як семантична категорія // Філософська думка, № 5, 2010. – С. 68–78.
4. *Кохан Я*. Розуміння мовних виразів // Філософська думка, № 3, 2012. – С. 55–68.
5. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
6. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965. – 392 с.
7. *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
8. *Маслов С. Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. – М.: Радио и связь, 1986. – 134 с.
9. *Райл Г.* Понятие сознания. Пер. с англ. – М.: Идея-Пресс, Дом интеллектуальной книги, 1999. – 408 с.
10. *Рвачёв В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. – К.: Наукова думка, 1974. – 260 с.
11. *Смальян Р.* Теория формальных систем. Пер. с англ. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
12. *Фреге Г.* Логика. Введение // Фреге Г. Логика и логическая семантика: Сборник трудов. Пер. с нем. – М.: Аспект Пресс, 2000. – С 307–325.
13. *Фреге Г.* Мысль. Логическое исследование // Фреге Г. Логика и логическая семантика: Сборник трудов. Пер. с нем. – М.: Аспект Пресс, 2000. – С 326–342.
14. *Эббинхаус Г.-Д., Якобс К., Ман Ф.-К., Хермес Г.* Машины Тьюринга и рекурсивные функции. Пер. с нем. – М.: Мир, 1972. – 264 с.
15. *Carnap Rudolf.* Logical syntax of language. New York, Harcourt, Brace, 1937. – 16 + 352 pp.
16. *Curry Haskell B*. Foundations of mathematical logic. New York, Dover Publications, Inc., 1977. – 8 + 408 pp.
17. *Tarski A*. The concept of truth in formalized languages. In: *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski*, translated by J. H. Woodger, Oxford, Clarendon Press, 1956 – pp. 152–278.